ersetzt werden]

Berechnung des Residuums:

Sei alles wie in Def. 25.1.1;

betrachte den Kreisring

$$A_{r_1,r_2}(z_0) := \overset{*}{B}_r(z_0),$$

also: $r_1 := 0,\ r_2 := r.$

Satz 24.2.2 $\Longrightarrow$ (Laurent Reihe)

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}$$

auf $A_{r_1,r_2}(z_0)$ mit

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k := \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\varkappa_\rho(z_0)} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz, \\[2ex] k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Daraus folgt:

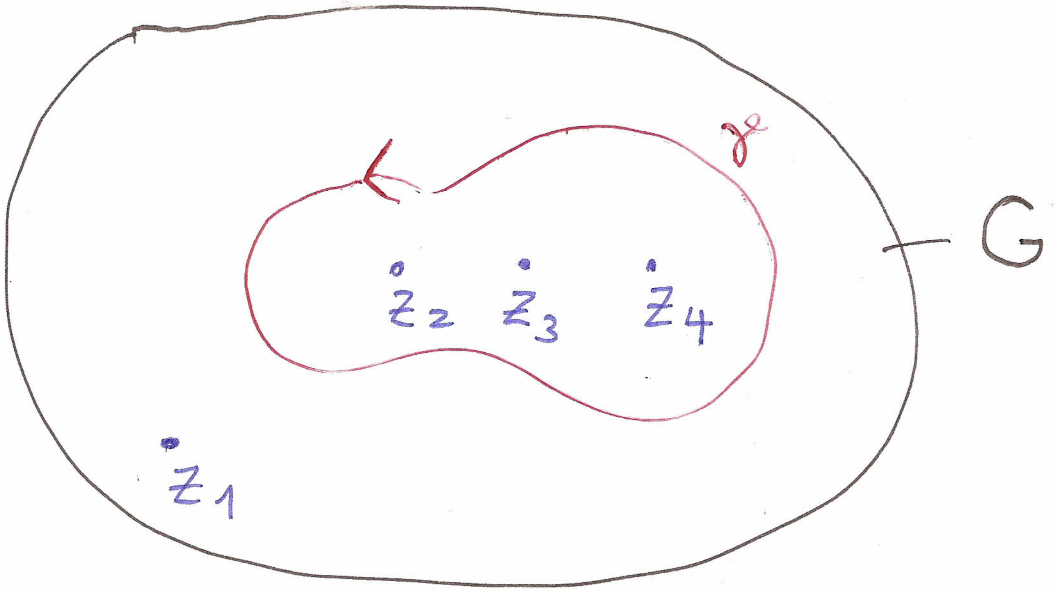
$$! \quad \boxed{\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1}} \quad !$$

Wir fassen zusammen.

Satz 25.1.2 (Residuensatz)

Sei γ ein einfach geschlossener, positiv orientierter Integrationsweg im einfach zusammenhängenden Gebiet G. Seien

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1, z_2, \ldots, z_N \in G, \\ z_k \notin \operatorname{Spur} \gamma \end{array} \right.$$



(γ muss nicht alle z_k umschließen !)

Ist f holomorph auf $G - \{z_1, \dots, z_N\}$,

{ wenn $z_1^*, \dots, z_M^*$ genau diejenigen Punkte sind, die im Innern von γ liegen

so gilt :

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{M} \operatorname{res}_{z_k^*} f .}$$

Bem : 1.) Berechnung des Kurvenintegrals $\hat{=}$ Berechnung der Residuen-summe

2.) Formal ist der Cauchy Integralsatz

enthalten:

f holomorph auf G, also keine Singularitäten $z_k \in G$ $\overset{\text{Formel}}{\Longrightarrow}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot 0 = 0,$$

da die Summe über die leere Index-menge 0 ist.

Beispiele und Formeln zur Residuenberechnung

1.) $f(z) := \dfrac{3}{z-i}$, $z \in \mathbb{C} - \{i\}$

$$\boxed{\operatorname{res}_i f = ?}$$

Mit der Integraldefinition und

Cauchy's Formel ist für $\rho > 0$

$$\operatorname{res}_i f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho(i)} \frac{3}{z-i}\, dz$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=} \quad 3$$

für die holom. Fkt. $g \equiv 3$ (vgl. Satz ~~23~~.~~2~~.1)

(alternativ – ohne Zitat: berechne das Integral direkt via Parametrisierung)

<u>Bem</u>: Die Laurent Reihe zu $f(z)$ auf $A_{0,\infty}(i)$ ist $\dfrac{3}{z-i}$.

2.) $\boxed{f(z) := e^{1/z}}$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Es gilt

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

$$\Longrightarrow \quad a_{-1} = 1 , \quad \mathrm{res}_0 f = 1$$

(der Koeff. a_{-1} bezieht sich hierbei auf die Laurent Entwicklung von f auf einem beliebigen Ring

$$A_{0,r}(0) = \overset{*}{B}_r(0)$$

mit positivem Radius r.)

In der Praxis kann es schwierig sein, das Kurvenintegral in der

Definition

$$\operatorname{res}_{z_0} f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho(z_0)} f(z)\,dz$$

auszurechnen oder den Koeffizienten

$$a_{-1} \quad \left(= \operatorname{res}_{z_0} f \right)$$

durch Entwickeln von f in eine Laurent Reihe auf $B_r^*(z_0)$ zu bestimmen.

$\longrightarrow$ Man benötigt Kriterien zur Berechnung von $\operatorname{res}_{z_0} f$!

Diese sind besonders einfach für den Fall „$f = \frac{g}{h}$".

Satz 25.1.1:

i) Sei $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Dabei gelte:

$$\begin{cases} g, h \text{ holomorph auf } B_r(z_0), \\ g(z_0) \neq 0,\ h(z_0) = 0,\ h'(z_0) \neq 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z_0} f = \operatorname*{res}_{z_0} \frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}.$$

ii) Die meromorphe Funktion f habe in z_0 einen Pol der Ordnung p.

Dann ist

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} \left[\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left((z-z_0)^p f(z) \right) \right]$$

Idee zu i):

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k}{\sum_{\underline{\underline{k=1}}}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k}$$

$$= \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \ldots\ldots}{(z-z_0)\left[h'(z_0) + \frac{1}{2} h''(z_0)(z-z_0) + \ldots\ldots\right]}$$

$$\approx \frac{g(z_0)}{(z-z_0)h'(z_0)}$$ für z nahe z_0

$$\Longrightarrow a_{-1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Idee zu ii):

$$g(z) := (z-z_0)^p f(z)$$

ist in der Nähe von z_0 holomorph

mit $g(z_0) \neq 0$

Laurent Reihe von
f auf $B_r^*(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{p} a_{-k} (z-z_0)^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\Longrightarrow g(z) = a_{-p} + \dots + a_{-1} (z-z_0)^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+p}$$

Das ist die Taylor Reihe von g

$$\Longrightarrow a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1} g}{d z^{p-1}} (z_0)$$

$$\Longrightarrow a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\qquad \right].$$

Beispiele:

1.) $f(z) := \dfrac{z^2+4}{\sin z}$, $\operatorname{Res}_0 f = ?$

Mit $g(z) := z^2+4$ und $h(z) := \sin z$

gilt $g(0) = 4$, $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$

$$\underset{\text{Satz 25.1.1}}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{Res}_0 \frac{z^2+4}{\sin z} = 4.$$

2) $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{z^3}$, $\operatorname{Res}_0 f = ?$

f hat einen Pol der Ordnung $p = 3$

in 0 $\overset{\text{Satz 25.1.1}}{\Longrightarrow}$

$$\operatorname{Res}_0 \frac{e^{iz}}{z^3} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} e^{iz}\Big|_0 = -\frac{1}{2}$$

direkt:

$$z^{-3} e^{iz} = z^{-3}\left[1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \ldots\right]$$

$$= z^{-3} + i z^{-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z} \pm \ldots\ldots$$

$$\Longrightarrow a_{-1} = -\frac{1}{2}.$$

Weitere Beispiele und Anwendungen

1.) $\operatorname{Res}_0 \dfrac{1}{z^2} = ?$

Laurent Reihe auf $B_r^*(0)$: $\dfrac{1}{z^2}$!

$$\Longrightarrow a_{-1} = 0$$

alternativ: $-\frac{1}{z}$ ist Stammfkt.

zu $\frac{1}{z^2}$ auf $\mathbb{C}-\{0\} \Longrightarrow$

$$\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho(0)} \frac{dz}{z^2} = 0$$

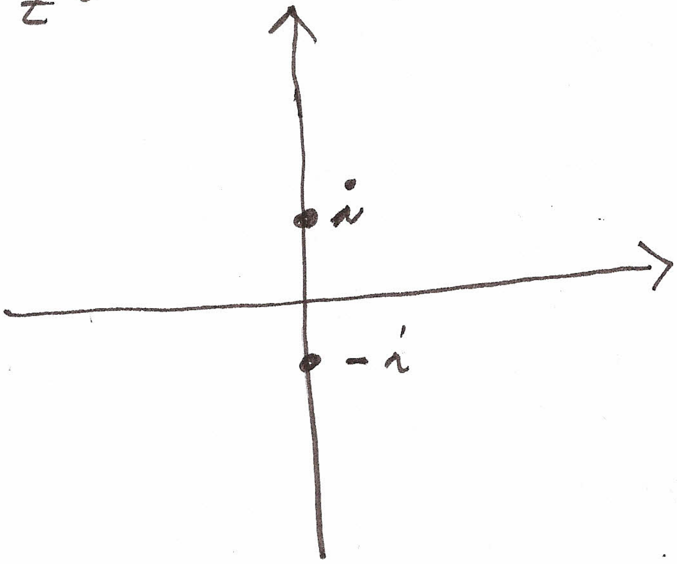
2.) aber: $\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z} = a_{-1} = 1$

3.) $\boxed{\int_{\mathcal{K}_3(i)} \frac{e^z}{1+z^2}\, dz = ?}$

Mit den Bezeichnungen aus dem Residuensatz 25.1.2 sei

$G := \mathbb{C}$, $\gamma = \mathcal{K}_3(i)$, $f(z) :=$

$$\frac{e^z}{1+z^2}, \quad z_1 = +i, \; z_2 = -i$$



z_1, z_2 liegen im Inneren von $\mathcal{K}_3(i)$

$$\overset{25.1.2}{\Longrightarrow} \int_{\mathcal{K}_3(i)} \frac{e^z}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname{Res}_{z_k} f$$

Satz 25.1.1 i)

mit

$$\operatorname{Res}_{i} \frac{e^z}{1+z^2} = \frac{e^z}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^i}{2i}$$

$$\operatorname{Res}_{-i} \frac{e^z}{1+z^2} = \frac{e^z}{2z}\Big|_{z=-i} = -\frac{e^{-i}}{2i}$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathcal{K}_3(i)} \frac{e^z}{1+z^2}\,dz = \pi\left(e^{i} - e^{-i}\right)$$

4) Berechnung gewisser reeller Integrale mittels Residuensatz

z.B.:
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = ?}$$

Hier hilft

Satz 25.1.3: Sei
$$f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$$
eine rationale Funktion mit den Polynomen $P(z)$, $Q(z)$. Es gelte:

i) Q habe keine reelle Nullstelle

ii) $\operatorname{grad} Q \geq 2 + \operatorname{grad} P$

Sind dann $z_1, \dots, z_N$ die Nullstellen von Q in der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$, so gilt:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}_{z_k} \frac{P}{Q}}$$

Bem: Insbesondere wird festgestellt, dass das uneigentliche Integral links existiert (als komplexe Zahl, da P, Q komplexe Koeff. haben dürfen.)